

# Optimisation pour plans d'expériences combinés à base des règles de lecture des cartes de contrôle

## Optimization for combined experimentations plans on the basis of control charts reading rules

Abdellah AIT OUAHMAN<sup>1</sup>, Aomar IBOURK<sup>2</sup>, \*Abdelhakim RHARRASSI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ENSA-Marrakech ouahman@ucam.ac.ma;

<sup>2</sup>Université Cadi Ayyad, Faculté de droit- Marrakech aibourk@yahoo.fr;

<sup>3</sup>DEG -ET/BEFRA- Marrakech, rharrassi1@yahoo.fr.

### Résumé :

Les plans d'expériences forment un outil de pré-optimisation puissant. Ils sont souvent sous-exploités en industrie non électrique ou chimique à cause du contraste qualité des résultats - coût d'expérimentation et la difficulté de modélisation. Nous montrerons que le coût d'expérimentation n'est pas nécessairement déterminé par le nombre d'expériences. Il peut être exclusivement dû au nombre de variations de niveaux subits par les entrées. Nous proposons dans ce cas, une méthode simple pour réduire le prix d'expérimentation sans passer par les alias: Il suffit d'attribuer convenablement les facteurs aux colonnes de la matrice des expériences. De plus, nous présentons une approche pratique pour la conception du modèle mathématique à optimiser, en se référant aux règles de lecture des cartes de contrôle. Ceci, dans le cas de plusieurs plans d'expériences simultanés.

**Mots-clés:** *PLAN D'EXPERIENCES, OPTIMISATION, CAPABILITE, REGLES DE LECTURE DES CARTES DE CONTROLE.*

### Abstract :

The experimental design method constitutes a powerful tool of pre-optimization. It is very often under-exploited in non electric industry and non chemical industry because of the contrast between the quality of result and experimentation cost. We will demonstrate that the experimentation cost is not necessarily determined by the number of experimentations. It may be exclusively due to the number of levels' variations applied to the inputs. We suggest in this case a simple method to reduce the cost without using aliases: We attribute appropriately factors to experimentation matrix columns. In addition, we present a practical approach of mathematical models conception by using control charts reading rules. This in the case of many simultaneous experimentations plans.

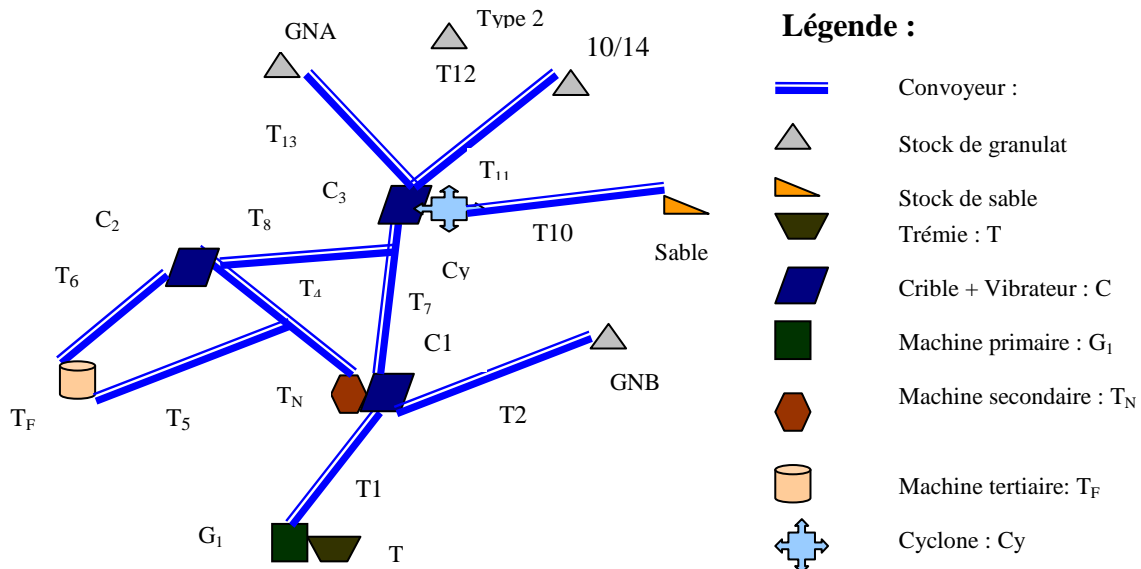
**Keywords:** *THE EXPERIMENTAL DESIGN METHOD, OPTIMIZATION, CAPABILITY, CONTROL CHARTS READING RULES.*

# 1. Introduction

Dans une ambiance de concurrence âpre, les entreprises sont soumises à des exigences de qualité de plus en plus rudes. D'où la nécessité de la mise à niveau des systèmes de production. Ceci n'est pas toujours facile pour les processus de fabrication complexes. La situation devient ardue lorsque le produit fabriqué est lui-même composé de plusieurs sous-produits, possédant chacun des seuils de tolérance- contraintes en valeurs atteintes-, tel que le cas qui nous intéresse : le granulat 10/14. Les plans d'expériences, peuvent constituer un outil capable de répondre à toutes ces exigences. Ils désignent une méthodologie pour la caractérisation comportementale d'un système, basée sur la modification et la mesure des variables propres au dispositif considéré [1]. La difficulté réside dans le travail de conception et de modélisation des programmes à optimiser et dans la minimisation du coût d'expérimentation. Dans cet article, à partir de la comparaison des changements de niveaux dans les matrices d'expériences d'un plan fractionnaire  $2^{3-1}$  et un plan complet  $2^3$ , nous montrerons que dans notre cas, le coût d'expérimentation est le même et que la réduction du coût vient d'une attribution convenable des facteurs aux colonnes. De plus, la méthode de conception que nous présentons est à base de la répartition des cartes de contrôle en des zones de confiances et d'autres de dérives. L'étude revêt un intérêt particulièrement intéressant du fait que le granulat dénommé entre dans la construction des routes et des autoroutes pour lesquelles les standards sont de plus en plus aigus.

## 2. Champ d'étude

C'est un processus de fabrication de granulats. Il est schématisé par *la figure 1* ci-après. Les machines Primaire, Secondaire et Tertiaire forment les sources de variations. Les chemins suivis par les cailloux concassés sont T-G<sub>1</sub>-T<sub>1</sub>-C<sub>1</sub>-T<sub>N</sub>-T<sub>7</sub>-C<sub>3</sub>-T<sub>11</sub> pour les cailloux de petite taille et T-G<sub>1</sub>-T<sub>1</sub>-C<sub>1</sub>-T<sub>N</sub>-T<sub>4</sub>-C<sub>2</sub>-T<sub>6</sub>-T<sub>F</sub>-T<sub>5</sub>-T<sub>4</sub>-T<sub>8</sub>-T<sub>7</sub>-C<sub>3</sub>-T<sub>11</sub> pour ceux de grande taille.



**Figure 1 :** Processus de fabrication du granulat 10/14

Le granulat produit est formé de trois granularités principales 10, 12,5 et 14. La détermination de la proportion de chacune se fait par l'essai granulométrique conformément à la norme NFP-560 de l'Afnor. On prépare deux échantillons: L'un de masse  $M_{1h}$  qu'on sèche à l'étuve

pour la détermination de la masse sèche  $M_{Is}$ . L'autre de masse  $M_h$  pour l'essai. La masse sèche de l'échantillon soumis à l'essai est:  $M_s = (M_{Is} * M_h) / M_{Ih}$ . (1)

On verse le matériau après l'avoir lavé et séché dans une colonne de tamis classés dans l'ordre décroissant des mailles. On agite la colonne puis on prend un à un les tamis en commençant par celui qui a la plus grande ouverture. On pèse son refus, soit  $R_1$  sa masse. On refait la même chose avec le tamis suivant. On ajoute la masse du refus précédent et on pèse l'ensemble; Soit  $R_2$  la masse des deux refus cumulés. On procède de la même manière pour les tamis qui restent pour déterminer  $R_3, R_4 \dots R_n$ . A la fin, on pèse le tamisât s'il y en, soit  $T_n$  sa masse. Les masses des différents refus cumulés  $R_i$  sont rapportées à  $M_s$ . Le pourcentage du tamisât correspondant au refus  $R_i$  est :  $100 - (100 * R_i / M_s)$ . (2)

En résumé, nous sommes en présence d'un processus formé de trois machines, produisant le granulat 10/14, lui-même formé de trois granularités 10, 12,5 et 14. Le processus doit être capable de répondre aux spécifications de qualité internes (Six sigma) et externes (Limites de spécifications imposées par le centre de contrôle des travaux publics (CCTP)). Ces dernières sont inscrites dans le tableau 1 suivant :

**Tableau1.** Les limites de spécifications des granularités du produit 10/14

Granularité	14	12,5	10
Limite inférieure de spécification LIS	85	50	1
Limite supérieure de spécification LSS	99	70	15

### 3. Stratégie d'optimisation

L'objectif assigné au départ à notre étude est d'instaurer un contrôle préventif de la qualité. Avant cela, une étude de Capabilité est nécessaire pour voir si le processus est en mesure de reproduire en respectant les tolérances imposées. Il suffit que l'une des granularités 10, 12,5 ou 14 soit inadéquate pour rejeter la totalité du produit. D'après L'Afnor : « Un processus sera déclaré apte, s'il a démontré pour les caractéristiques sélectionnées, qu'il était capable de produire pendant une période suffisamment longue, avec un taux théorique de non-conformité inférieur aux exigences internes à l'entreprise ou contractuelles. Ce taux est fréquemment fixé à 0,27% (méthode Six sigma) ». Pour des procédés industriels, généralement dans l'approximation d'une loi normale, on opte pour les indices  $Cps$ ,  $Cpi$ ,  $Cpk$  et  $Cp$  (respectivement, indice de capabilité supérieure, de capabilité inférieure, de décentrage et de dispersion).  $Cp$ , le plus utilisé, a pour but de vérifier si la dispersion de la caractéristique observée est plus ou moins grande par rapport à l'intervalle de tolérance. Il doit être au moins égal à 1,3, alors que  $Cpk$  doit être supérieur ou égal à 1 [2].

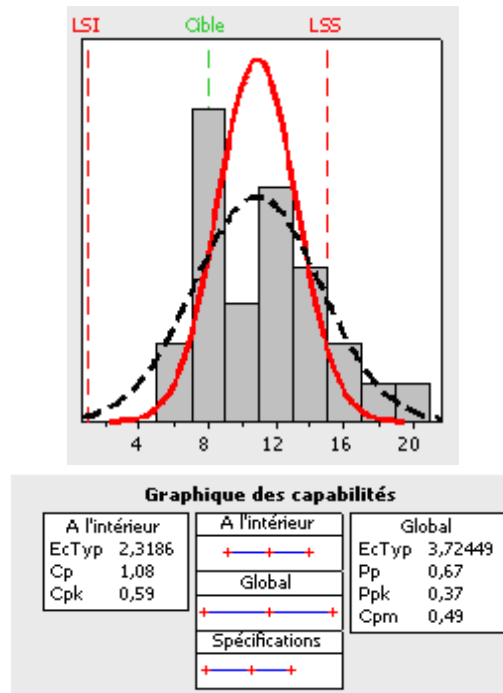
$$Cp = \frac{LSS - LIS}{6\sigma}$$

$$Cpk = \min(Cps, Cpi) \quad (3)$$

$$Cpk = \min((LSS - \mu) / 3\sigma, (\mu - LIS) / 3\sigma)$$

$\mu$  et  $\sigma$  sont la moyenne et l'écart type de l'échantillon.

Les performances évoquées ne sont pas atteintes dans notre cas comme le montre la figure 2 suivante et les résultats inscrits en dessous. Le processus n'est pas capable vis-à-vis de la granularité 10. IL doit être mis à niveau. Nous choisissons la méthode des plans d'expériences MPE.



**Figure 2 :** Etude de la Capacité pour la granularité 10

Le but de notre recherche est de déterminer les longueurs optimaux pour les réglages des machines Primaire ( $X_1$ ), Secondaire ( $X_2$ ) et Tertiaire ( $X_3$ ) qui conduiront à une production dans les normes imposées, mais de plus optimale. En fait, grâce à un dispositif hydraulique ou un système vis écrou, l'ouverture entre les cônes d'une machine -responsable de la qualité de concassage- peut être réglée entre L min et L max. Nous attribuons à  $X_i$  :

- 1, lorsque la machine correspondante est au niveau supérieur de réglage ( $L=L_{max}$ ) ;
- +1, lorsque la machine correspondante est au niveau inférieur de réglage ( $L=L_{min}$ ).

$X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  constituent donc les facteurs de chacun des plans d'expériences et le regroupement de leur intervalle de variation définit le domaine d'étude.

Le dispositif aura trois sorties ou réponses qui sont :

- $Y_{14}$  est le pourcentage passant au tamis de la granularité 14 ;
- $Y_{12.5}$  est celui relatif à la granularité 12.5 ;
- $Y_{10}$  est celui de la granularité 10.



**Figure 3 :** Le processus a trois entrées et trois sorties

Les intervalles entre les limites de spécifications  $LSS$  et  $LSI$  des trois granularités formeront l'espace expérimental. Un autre espace expérimental plus ou moins grand est obtenu à partir des limites supérieures et inférieures de contrôle  $LSC$  et  $LIC$  à plus ou moins trois écarts types de la moyenne, comme le recommande la méthode Six Sigma.

Vu la sensibilité de notre étude (satisfaire les conditions sur les trois granularités en même temps), nous devons effectuer suffisamment d'expériences. Nous adoptons donc des plans factoriels complets  $2^3$ . En fait, le choix d'un plan fractionnaire  $2^{3-1}$  réduisant le nombre d'expériences à 4 au lieu de 8, n'est pas vraiment intéressant dans notre cas : La machine Primaire et la machine Secondaire sont successivement les plus difficiles à serrer (+1) ou à desserrer (-1). Pour la première un desserrage dure environ 45 min et nécessite un effectif de quatre ouvriers. C'est donc le réglage subit par ces deux machines qui détermine le coût d'expérimentation. Or, avec un plan fractionnaire  $2^{3-1}$ , On est obligé de prendre  $X_1$  pour la machine Primaire et  $X_2$  pour la Secondaire, puisqu'on sait par expérience que ce sont ces deux machines qui déterminent en premier lieu la qualité du produit. Si on aliase les deux facteurs  $X_1$ ,  $X_2$  et on prend l'interaction  $X_1X_2$  comme 3<sup>ème</sup> facteur ; conformément au *tableau 2* ci-après, La machine primaire change d'état une seule fois (passage de -1 à 1) alors que l'état de la machine secondaire varie 3 fois (de -1 à +1, puis de +1 à -1 et enfin de -1 à +1), ce qui est exactement le nombre de changements d'états lors de l'utilisation d'un plan complet, comme l'affirme le *tableau 3*, à condition bien sûr, de respecter l'ordre standard de succession des expériences, dit de Yates, et de ne pas choisir un ordre aléatoire. C'est le choix judicieux des colonnes correspondantes à chaque machine qui baissera le coût des expériences. Il faut donc affecter la 5<sup>ème</sup> colonne du *tableau 3* à la machine Primaire, la 4<sup>ème</sup> colonne à la machine Secondaire et la 3<sup>ème</sup> colonne à la machine Tertiaire. De plus les effets calculés dans des plans factoriels fractionnaires sont aliasés. Ils ne traduisent pas directement l'effet des facteurs considérés individuellement mais d'ensembles de facteurs et d'interactions. Il est donc parfois impossible conclure de façon sûre sur l'effet d'un facteur [3]. Ce qui ne nous arrange guère.

**Tableau 2:** Matrice d'expériences pour un plan fractionnaire  $2^{3-1}$

$X_2$	$X_1$	$X_3 = X_2.X_1$
-1	-1	+1
+1	-1	-1
-1	+1	-1
+1	+1	+1

Nous aurons donc, trois plans d'expériences complets  $2^3$  combinés. Un pour chaque granularité. Pour simplifier l'étude nous les traiterons en même temps (*tableau 3*).

**Tableau 3:** Plans d'expériences complets pour les trois réponses

Ordre de Yates	Moy	$X_3$	$X_2$	$X_1$	$X_3X_2$	$X_3X_1$	$X_2X_1$	$Y_{14}$	$Y_{12.5}$	$Y_{10}$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	95	61,0	8
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	94	59,5	9
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	93	56,0	11
4	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	91	52,0	12
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	86	49,0	13
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	84	47,0	14
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	79	46,5	16
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	77	43,0	18
Valeurs non codées	Niv+1	8cm	6cm	4cm						
	Niv -1	12cm	9cm	6cm						

Les colonnes  $Y_{14}$ ,  $Y_{12,5}$  et  $Y_{10}$  représentent les valeurs obtenues expérimentalement pour chacune des combinaisons de réglages correspondantes.  $X_i X_j$  représente l'interaction entre  $X_i$  et  $X_j$ . Nous avons volontairement fait omission de l'interaction d'ordre trois  $X_1 X_2 X_3$  afin de pouvoir effectuer les tests statistiques (plus loin). Le modèle mathématique sous forme vectorielle s'écrit :  $Y = X.a + e$ .  $Y$  est le vecteur des réponses,  $a$  est celui des coefficients,  $X$  est la matrice de calcul du modèle et  $e$  est le vecteur d'écart. Nous devons à présent déterminer les coefficients  $a_i$  du modèle postulé qui s'écrit dans notre cas comme suit, à condition de négliger le vecteur d'écart :

$$\begin{aligned}
 Y_{14} &= a_{0,14} + a_{1,14} X_1 + a_{2,14} X_2 + a_{3,14} X_3 + a_{21,14} X_2 X_1 + a_{31,14} X_3 X_1 + a_{32,14} X_3 X_2 \\
 Y_{12,5} &= a_{0,12,5} + a_{1,12,5} X_1 + a_{2,12,5} X_2 + a_{3,12,5} X_3 + a_{21,12,5} X_2 X_1 + a_{31,12,5} X_3 X_1 + a_{32,12,5} X_3 X_2 \\
 Y_{10} &= a_{0,10} + a_{1,10} X_1 + a_{2,10} X_2 + a_{3,10} X_3 + a_{21,10} X_2 X_1 + a_{31,10} X_3 X_1 + a_{32,10} X_3 X_2
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Pour chacune des réponses, les estimations des coefficients du modèle sont généralement données par la matrice  $\hat{A}$  telle que  $\hat{A} = ({}^t X X)^{-1} X Y_{rep}$ . C'est une matrice optimale au sens d'Hadamard (variabilité minimale), puisque  ${}^t X X = n I_n$ . Ainsi, on a  $\hat{A} = (X Y_{rep})/n$ . Avec  $n$  est le nombre d'expériences,  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$  et  $Y_{rep}$  est le vecteur des réponses expérimentales [4]. Une méthode pratique, pour calculer chacun des coefficients consiste à faire la moyenne des produits, élément à élément de la colonne des réponses et celle du facteur se rapportant au coefficient cherché. Les  $a_{0,ij}$  correspondent aux colonnes moyennes. Nous donnons par la suite deux exemples de calcul:

$$a_{0,14} = (95 + 94 + 93 + 91 + 86 + 84 + 79 + 77)/8 = 87,375$$

$$a_{1,10} = (-8 - 9 - 11 - 12 + 13 + 14 + 16 + 18)/8 = 2,625$$

Un premier modèle mathématique peut être construit:

$$\begin{aligned}
 Y_{14} &= 87,375 - 5,875 X_1 - 2,375 X_2 - 0,875 X_3 - 1,125 X_2 X_1 - 0,125 X_3 X_1 - 0,125 X_3 X_2 \\
 Y_{12,5} &= 51,75 - 5,375 X_1 - 2,375 X_2 - 1,375 X_3 + 0,75 X_2 X_1 - 0,5 X_3 X_2 \\
 Y_{10} &= 12,625 + 2,625 X_1 + 1,625 X_2 + 0,625 X_3 + 0,125 X_2 X_1 + 0,125 X_3 X_1 + 0,125 X_3 X_2
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

La technique du screening permet de déterminer, parmi un ensemble initial de facteurs, les éléments influents. Il s'agit donc d'un procédé de sélection ou de criblage [5] [6]. En effet le test de Student permet d'alléger le modèle mathématique en éliminant les facteurs et les interactions qui n'ont pas de conséquence significative sur la réponse. Dans un deuxième temps, on accomplit le test de Fisher-Snedecor afin de valider le modèle ajusté (Test de la variance): « D'une façon générale, en matière de régression, le principe de l'analyse de la variance est de subdiviser la variation totale en une composante factorielle relative à l'équation de régression ou au modèle utilisé, et une composante expérimentale, la première devant être testée par rapport à la deuxième. »[7]. Le test de Fisher-Snedecor permet de comparer deux variances, l'une due au modèle mathématique et l'autre résiduelle, en tenant compte du degré de liberté de chacune d'elle. On utilise pour cela, la loi statistique dite de Fisher (ou loi  $F$ ). Ceci dans l'hypothèse de distributions normales. Le premier Test (de Student), dit de signification des effets, fait intervenir les résidus  $e_i$ . C'est la différence entre la valeur expérimentale de la réponse et la valeur calculée à partir du modèle. On peut alors évaluer un estimateur de la variance due aux résidus. Il est donné par :  $s^2 = (\sum e_i^2)/(n-p)$ , où  $p$  est le nombre de coefficients du modèle (y compris la constante). On montre que tous les effets ont la même variance donnée par:  $s_i^2 = s^2/n$ .  $s^2$  ne peut être calculée pour un plan saturé, où on tient compte de toutes les interactions, dans ce cas on aurait  $n = p$ , c'est pourquoi nous avons négligé l'interaction d'ordre 3. Pour chaque facteur on calcule le rapport  $t_i$  de la valeur absolue de coefficient correspondant par la variance commune :  $t_i = |a_i|/s_i$ . Pour un risque donné  $\alpha$ , et pour  $v = n-p$  degrés de liberté, on lit dans sur la table de Student la valeur  $t_{crit}$ . Si  $t_i < t_{crit}(\alpha, v)$ , L'effet correspondant

n'est pas significatif. Dans notre cas, un risque de 5% et  $\nu = n-p = 8-7 = 1$ , impliquent  $t_{crit.} = 12,71$ . Pour la granularité 12,5, un logiciel SPC<sup>1</sup> donne les résultats notés dans le tableau 4 suivant :

**Tableau 4 :** Test de signification pour la granularité 12,5

Terme	Effet	Coeff	s <sub>i</sub>	t <sub>i</sub>	t <sub>crit</sub>
constante		51,75	0,125	414	12,71
X <sub>3</sub>	-2,750	-1,375	0,125	-11	12,71
X <sub>2</sub>	-4,750	-2,375	0,125	-19	12,71
X <sub>1</sub>	-10,750	-5,375	0,125	-43	12,71
X <sub>3</sub> *X <sub>1</sub>	-1	-0,5	0,125	-4	12,71
X <sub>3</sub> *X <sub>2</sub>	0	0	0,125	0	12,71
X <sub>2</sub> *X <sub>1</sub>	1,5	0,75	0,125	6	12,71

Seuls la constante, l'effet de X<sub>2</sub> et X<sub>1</sub> sont significatifs puisque les t<sub>i</sub> correspondantes sont supérieures à la valeur critique. Seulement, dans ce cas précis, nous retenons X<sub>3</sub> puisque t<sub>3</sub>=11 est proche de t<sub>crit</sub>.

Après cette étape, le modèle mathématique pour l'ensemble des sorties se réduit à :

$$Y'_{14} = 87,375 - 2,375X_2 - 5,875X_1$$

$$Y'_{12,5} = 51,75 - 1,375X_3 - 2,375X_2 - 5,375X_1 \quad (6)$$

$$Y'_{10} = 12,625 + 1,625X_2 + 2,625X_1$$

Pour le test F, On notera par la suite Y<sub>i</sub> les réponses observées lors de la réalisation des expériences, Y<sub>i</sub><sup>est</sup> les réponses estimées à l'aide du modèle, et Y<sub>moy</sub> la moyenne des réponses.

Soit SCEL la somme des carrés des écarts dus à la liaison :  $SCEL = \sum (Y_i^{est} - Y_{moy})^2$  ;

Le carré moyen associé à SCEL est :  $CML = SCEL / p - 1$ , il représente l'erreur due au modèle .

Soit s<sup>2</sup> l'erreur résiduelle. Si  $F_{obs} = CML / s^2$  est supérieur à un F<sub>crit</sub> lu sur la table de Fisher-Snedecor, pour un risque donné et avec  $\nu_1 = p - 1$  et  $\nu_2 = n - p$  degrés de liberté, le modèle est ratifié. Ceci est le cas de notre modèle réduit tout entier pour un risque de 5% (Tableau 5).

**Tableau 5:** Test de Fisher pour les trois réponses du processus

Sorties	DL effets	DL Résidus	SCEL	CML	s <sup>2</sup>	F <sub>obs</sub>	F <sub>crit</sub>
Y'_{14}	2	5	321,50	160,625	3,325	48,31	5,79
Y'_{12,5}	3	4	291,375	97,125	1,656	58,64	6,59
Y'_{10}	2	5	76,250	38,125	0,875	52,59	5,79

Le système d'équation ainsi obtenu est linéaire, Nous ambitionnons l'utilisation de la programmation linéaire. Pour cela :

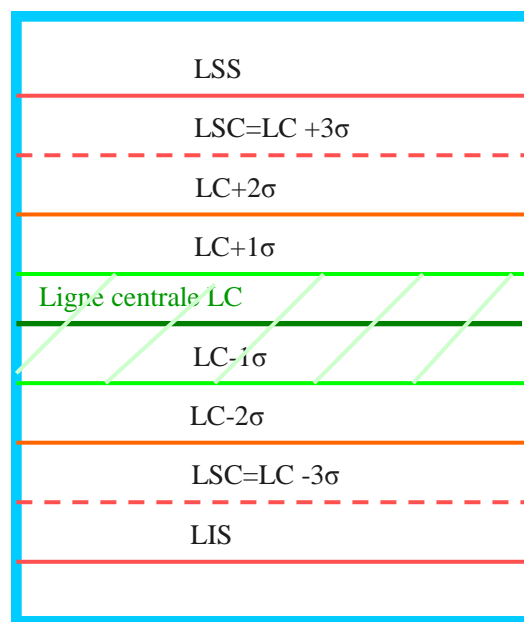
- Il faut que les variables soient de décision positives. Nous allons donc opérer le changement de variable suivant :  $t_i = X_i + 1$ . Ainsi  $-1 \leq X_i \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t_i \leq 2$  ;
- L'entreprise a tout intérêt à exploiter les cailloux concassés à fond. Il faut favoriser la granularité 14 par rapport aux autres. La sortie lui correspondante constituera l'objectif ;

<sup>1</sup> : contrôle statistique des processus

- Les granularités 12,5 et 10 serviront pour la conception des contraintes du programme. Nous nous référons aux performances souhaitées de la carte de contrôle pour moyennes  $\bar{X}$ . Elle est généralement utilisée dans ce genre d'application en adjonction avec la carte pour étendue  $R$ . Les règles de lecture lui correspondantes sont :

1. un point hors des limites à  $\pm 3\sigma$ .
2. 9 points consécutifs d'un seul coté de la ligne centrale.
3. 6 points consécutifs en ordre croissant ou décroissant.
4. 14 points consécutifs qui augmentent et diminuent alternativement.
5. 2 points sur 3 points consécutifs hors des limites à  $\pm 2\sigma$ .
6. 4 points sur 5 points consécutifs hors des limites à  $\pm 1\sigma$ .
7. 15 points consécutifs dans les limites à  $\pm 1\sigma$ .
8. 8 points consécutifs en dehors des limites à  $\pm 1\sigma$ .

Cette carte se présente comme le montre la figure 4 suivante:



**Figure 4 :** Présentation d'une carte de contrôle

Pour la granularité 12,5,  $LSS=70$  et  $LIS=50$ , nous prenons comme ligne centrale de la carte  $LC=60$  pour que le processus soit centré. En outre, de nos jours, les grandes entreprises imposent  $Cp=1,67$ , soit  $Cp = 5/3$ . Cela veut dire que, si la ligne supérieure de contrôle  $LSC$  doit se trouver à trois écart-types  $LSC=LC+3\sigma(\bar{X})$  de  $LC$ , selon Six Sigma; la limite supérieure de spécification doit se trouver à cinq écarts types  $LSS = LC + 5\sigma(\bar{X})$ . Dans ces conditions, nous devons avoir  $LSC= 60 + 3(LSS-LC) / 5 = 66$ . De plus, selon les règles de lecture, il suffit d'avoir 2 points sur 3 hors des limites à  $\pm 2\sigma(\bar{X})$  (règle 5) ou 4 points consécutifs sur 5 hors des limites à  $\pm 1\sigma(\bar{X})$  (règle 6), pour que le processus soit déclaré en dérive. Il faut donc cerner les points entre les lignes à  $\pm 1\sigma(\bar{X})$ , soit à  $(60 \pm (LSS - LC) / 5)$ , donc entre 58 et 62. Cela comporte un risque (regle7 : 15 points consécutifs entre les limites à  $\pm 1\sigma(\bar{X})$ ) mais il est minimal par rapport à ceux des règles citées auparavant. Un raisonnement similaire, en tenant pour ligne centrale  $LC = 7$ , montre que la granularité 10 doit être cernée entre 5,6 et 8,4.



Toutes ces considérations conduisent au programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } Z = Y_{14} \\
 S / C \left\{ \begin{array}{l} t_i > 0 \\ t_i < 2 \\ Y_{12.5} < LC_{12.5} + \sigma_{12.5} \\ Y_{12.5} > LC_{12.5} - \sigma_{12.5} \\ Y_{10} < LC_{10} + \sigma_{10} \\ Y_{10} < LC_{10} - \sigma_{10} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l}
 \text{Max } z = 95,625 - 5,875t_1 - 2,375t_2 \\
 S / C \left\{ \begin{array}{l} t_1, t_2, t_3 > 0 \\ t_1 < 2 \\ t_2 < 2 \\ t_3 < 2 \\ 60,875 - 5,375t_1 - 2,375t_2 - 1,375t_3 < 62 \\ 60,875 - 5,375t_1 - 2,375t_2 - 1,375t_3 > 58 \\ 8,375 - 2,625t_1 - 1,625t_2 < 8,4 \\ 8,375 - 2,625t_1 - 1,625t_2 > 5,6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les contraintes ne sont pas de même sens, ce programme peut être résolu par la méthode de Fourier. L'utilisation d'un logiciel de programmation linéaire donne les résultats suivants:

$$Z = 95.62500, t_1 = 0, t_2 = 0 \text{ et } t_3 = 0.$$

$t_i = 0 \Rightarrow X_1 = -1$ , Ceci implique toutes les machines doivent être à la limite supérieure. Ainsi:

- La production de la granularité 14 sera de 95,625% ;
- Celle de la granularité 12,5 sera de 60,875% ;
- Pour la granularité 10 aura 8,375%.

Les deux derniers passants aux tamis s'inscrivent parfaitement entre les limites choisies.

Une question pertinente se pose quant à la granularité 14. Avec une production aussi grande, une carte de contrôle ne signalera-t-elle pas une dérive ? On peut y remédier en prenant comme ligne centrale  $LC=95$ . Puisque  $LSS=99$  on prendra  $LIS=91$  au lieu de 85 afin de centrer le processus. Les lignes à  $\pm 1\sigma(\bar{X})$  se trouveront à 95,8 et 94,2.  $z = 95,625$ , se trouve entre ces deux limites et ne sera pas interprétée comme une dérive.

#### 4. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré que la diminution du coût d'expérimentation, dans des cas précis, surtout lorsqu'il s'agit de processus composés de machines à réglage difficile et onéreux, peut être obtenue par une attribution des colonnes de la matrice d'expérimentation aux facteurs adéquats. Ce prix n'est pas automatiquement une conséquence du nombre d'expériences. Nous ne serons pas dans ce genre de cas, obligé d'utiliser les aliases. Les résultats seront donc, plus précis.

En outre, nous nous sommes basés sur les règles de lecture de la carte de contrôle pour la moyenne afin de formaliser le programme à optimiser. Nous avons réparti ces cartes en différentes parties pour pouvoir garder les sorties du processus dans la zone de non dérives. Cette stratégie peut être généralisée à toutes les applications multi-plans d'expériences similaires. Bien sûr, la répartition peut changer pour certaines cartes de contrôle telle que la carte Cusum par exemple. De plus, il faut choisir la méthode d'optimisation propice au modèle mathématique réduit (programmation linéaire ou non linéaire, heuristique...). Enfin, nous avons travaillé sur un cas réel, un processus de concassage, et nous avons montré l'apport de la MPE jointe avec les méthodes de la recherche opérationnelle dans la maximisation de la production et dans le respect total des standards de la qualité.

## 5. Bibliographie

- [1] STEPHANE VIVIER, " *Stratégies d'optimisation par la méthode des plans d'expériences et application aux dispositifs électrotechniques modélisés par éléments finis*", Thèse de doctorat à l'école Centrale de Lille, (2002)
- [2] MONTGOMERY D. C, PANAGOS, M., ET R. G. HEIKES, " *Economic Design of Control Charts for Two Manufacturing Process Models* ", Naval research logistics quarterly, Vol. 32. N. 4, (1985)
- [3] JEAN L GOUPY, " *Les plans d'expériences* " Revue Modulad N 34, (2006)
- [4] DANIEL BENOIST, YVES TOURBIER, SANDRINE GERMAIN TOURBIER " *Plans d'expériences : construction et analyse*", Edition Lavoisier – Tec & Doc, (1994)
- [5] PAUL SCHIMMERLING, JEAN-CLAUDE SISSON ET ALI ZAIDI, " *Pratique des plans d'expériences* ", Editions Lavoisier Tec & Doc, (1998)
- [6] J,L GOUPY, " *Etude comparative des plans d'expériences* ", Revue de statistique appliquée, Tome 38 N0 4, p5-44 ; (1990)
- [7] JEAN-JACQUES DROESBEKE, JEANNE FINE, GILBERT SAPORTA, " *Plans d'expériences - Applications à l'entreprise*", Edition Technip, (1997).